現代デジタル社会を支える数学の定理
The mathematical theorem supporting the modern digital society

都市教養学部理工学系
数理科学コース
高桑 昇一郎

1　はじめに

「数学は何の役に立つのか？」とは多くの人々が抱いている問いであろう．この問いに対する答えとして，筆者は，高等学校の短期集中講座等で,『現代社会を支える数学の理論』という題名の講演を行い，Fourier 解析，暗号理論，符号理論と呼ばれる数学の分野が現代社会で生活するために必要不可欠な基盤を作っていることを解説した．

本稿は，その 1 つの例として，CD やコンピュータ・サウンドをはじめとするすべてのデジタル方式の基礎となっているサンプリング定理（標本化定理）について高校生に教えることを目的とした研究ノートである．サンプリング定理は，波や信号を解析するための数学的手法である Fourier 解析の応用として得られる．本稿では，最初に，波や信号の周期と周波数について説明する．続いて，Fourier 解析（Fourier 級数と Fourier 変換）の定義と基本的事項について述べた後に，サンプリング定理とその意味について説明する．Fourier 解析については [2], [4] の入門書を参照されたい．紙数の都合上，本稿で挙げた Fourier 解析の基本的事項について証明は省略せざるを得なかった．証明は [1], [3], [6] を参照されたい．なお，記述を正確にするために，本稿では高校では教えない微分積分の用語や記号も用いることにした．

2　周期と周波数

以下では、扱う波や信号は実数全体 ($\mathbb{R}$ で表す) で定義された実数値または複素数値の関数 $f(t)$ として表わされているとする．$f(t)$ が，定数 P ($\neq 0$) に対して

(1)
$$f(t) = f(t+P)$$

を満たすとき，$f(t)$ を**周期関数**といい，P を $f(t)$ の**周期** (**period**) という．このとき，任意の整数 n に対して

$$f(t) = f(t+nP)$$

が成り立つから，nP も $f(x)$ の周期となる．周期のうちで正の値の最小のものを**基本周期**という．以後，基本周期のことを単に周期ということにする．

例 1　正の定数 a に対して，三角関数 $\cos at, \sin at$ は周期 $2\pi/a$ の周期関数である．この 2 つの関数によって単振動の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$$

のすべての解を表示できることが知られている．このことから，三角関数 cos と sin は最も基本的な周期関数と考えられている．

例 2 関数 $f(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$ は周期関数ではない．もし，$f(t)$ が周期 P (>0) をもつとすると，

$$f(P)=\cos P+\sin\sqrt{2}P=f(0)=1$$
$$f(-P)=\cos P-\sin\sqrt{2}P=f(0)=1$$

より，

$$\cos P=1\,,\qquad \sin\sqrt{2}P=0$$

を得る．これより，自然数 $m,\ n$ が存在して，$P=2m\pi,\ \sqrt{2}P=n\pi$ が成り立つから，$\sqrt{2}=n/(2m)$ となってしまい，これは $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

周期 P の周期関数に対して逆数 $1/P$ を**周波数** (**frequency**) または**振動数**といい，$2\pi/P$ を**角周波数**という．時間の単位の秒 (second) に対する周波数の単位は**ヘルツ (Hz)** が用いられる．音波の場合，人間が耳で聞くことのできる音の周波数は 50Hz から 20kHz(20,000Hz) までとなっており，音はその周波数が大きいほど高音になる．

例 2 の関数 $f(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$ は周期関数ではないが，2 つの周期関数の和になっている．このことは $f(t)$ が周期 2π（周波数 $1/2\pi$）の成分 $\cos t$ と周期 $\sqrt{2}\pi$（周波数 $1/\sqrt{2}\pi$）の成分 $\sin\sqrt{2}t$ の和に分解されることを示している．

3 Fourier 級数の定義

フランスの数学者・物理学者である J. Fourier (1768–1830) は熱の伝導の研究を行ってる際に，周期関数を三角関数 sin と cos の和として表すことを考え出した．

周期 2π の関数 $f(t)$ に対して，積分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\qquad(\ n=0,\,1,\,2,\,\cdots\ )\tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt\qquad(\ n=1,\,2,\,\cdots\ )\tag{3}$$

が存在するとき $a_n,\ b_n$ を $f(t)$ の **Fourier 係数**といい，形式的に

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\tag{4}$$

と表して，これを関数 $f(t)$ の **Fourier 級数**または **Fourier 展開**という．この時点では，左辺と右辺の間に等号が成り立つかどうかわからないことを注意しておく．

もし，等式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\tag{5}$$

このが成り立ったとすると，$a_n,\ b_n$ が (2), (3) で与えられることは次のように示せすことができる．この式の両辺に $\cos nt$ を掛けて，両辺を $-\pi$ から π まで積分する．ここで，項別積分が可能であるとすると，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\cos kt\,dt+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\sin kt\,dt\Big)$$

となる．整数 n, k に対して，三角関数の積分

$$(6)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\,dt = \begin{cases} 2\pi & (\ k=0\ ) \\ 0 & (\ k\neq 0\ ) \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt\,dt = 0$$

$$(7)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt\,dt = \begin{cases} 2\pi & (\ n=k=0\ ) \\ \pi & (\ n=k\neq 0\ ) \\ 0 & (\ n\neq k\ ) \end{cases}$$

$$(8)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt\,dt = \begin{cases} \pi & (\ n=k\neq 0\ ) \\ 0 & (\ n=k=0\ ) \\ 0 & (\ n\neq k\ ) \end{cases}$$

$$(9)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin kt\,dt = 0$$

を用いて，$n=0$ のときは，式 (6) より

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

を得る．$n \geqq 1$ のときは，式 (7), (9) より

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$$

を得る．同様に，式 (5) の両辺に $\sin nt$ を掛けて，両辺を $-\pi$ から π まで積分し，式 (8), (9) より

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

を得る．

Fourier 級数の意味するもの　Fourier 級数の式

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

において，関数

$$y = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

は周期 $2\pi/n$（周波数 $n/2\pi$）の単振動の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0$$

の解である．このことから，Fourier 級数は元の関数 $f(t)$ を周波数が $1/2\pi$ の整数倍の単振動の和に分解したものと考えることができ，Fourier 係数 a_n, b_n を求めることは $f(t)$ に含まれる周波数 $n/2\pi$ の単振動の成分を求めることに他ならない．

一般の周期関数の Fourier 級数　$f(t)$ を周期 $2T$ ($T > 0$) の関数とする．関数 $\tilde{f}(t) = f\big(\frac{T}{\pi}t\big)$ は周期 2π 関数となるから，$\tilde{f}(t)$ の Fourier 級数を用いて，$f(t)$ の Fourier 級数は

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{n\pi t}{T}\Big) \tag{10}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\frac{n\pi t}{T}\,dt \qquad (\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ ) \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\frac{n\pi t}{T}\,dt \qquad (\ n = 1,\ 2,\ \cdots\ ) \tag{12}$$

で与えられる．

4　複素 Fourier 級数

次に，よく用いられる Fourier 級数のもう一つの表し方を述べておく．有名な Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

より，三角関数 sin, cos は

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \qquad \sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

と表せるから，式 (4) に代入すると，

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Big(\frac{a_n - ib_n}{2}\Big)e^{int} + \Big(\frac{a_n + ib_n}{2}\Big)e^{-int}\right]$$

となる．そこで，

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

とおくと

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \tag{13}$$

と表すことができる．これを**複素 Fourier 級数**または **Fourier 級数の複素形**という．Euler の公式より，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \qquad (\ n \in \mathbb{Z}\ ) \tag{14}$$

となる．複素 Fourier 級数の式において，関数 e^{int}, e^{-int} はそれぞれ複素平面における反時計回り，時計回りの周期 $2\pi/n$ の等速円運動を表している．

一般の周期関数の複素 Fourier 級数　周期 $2T$ の関数 $f(t)$ の複素 Fourier 級数は次で与えられる．

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi nt}{T}}, \qquad c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-\frac{i\pi nt}{T}}\, dt$$

5　Fourier 級数の収束

フーリエ自身は著書『熱の解析的理論』において,「任意の関数は、三角関数の級数で表すことができる」（フーリエの定理）と主張した．この証明は不十分なものであり，無条件には成り立たないことが現在では知られている．

定義 3 関数 $f(t)$ が区間 $[a,\, b]$ で**区分的に連続**（ **piecewise contimuous** ）であるというのは，有限個の点

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

があって，$f(t)$ は開区間 $(a_j,\, a_{j+1})$ で連続であり，片側極限値

$$\lim_{x \to a_j+0} f(t) = f(a_j + 0), \qquad \lim_{x \to a_j-0} f(t) = f(a_j - 0)$$

が存在して有限であることをいう．さらに，導関数 $f'(x)$ が開区間 $(a_j,\, a_{j+1})$ で存在して連続で，その片側極限値

$$f'(a_j - 0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a_j+h) - f(a_j-0)}{h} = \lim_{t \to +0} \frac{f(a_j-t) - f(a_j-0)}{-t}$$
$$f'(a_j + 0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a_j+h) - f(a_j+0)}{h} = \lim_{t \to -0} \frac{f(a_j-t) - f(a_j+0)}{-t}$$

が存在して有限なとき，$f(t)$ は $[a,\, b]$ で**区分的に滑らか**（ **piecewise smooth** ）または**区分的に C^1 級**であるという．

Fourier 級数の第 N 項までの和（部分和）を $s_N(f,t)$ とする．すなわち

$$s_N(f,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$$

である．部分和 $s_N(f,t)$ の収束について次の定理が成り立つ．

定理 4 (Dirichlet-Jordan)
$f(t)$ が $[-\pi,\, \pi]$ で区分的に滑らかな周期 2π の関数ならば，$f(t)$ の Fourier 級数はすべての点で収束し，次が成り立つ．

$$\lim_{N \to \infty} s_N(f, t_0) = f^*(t_0) = \frac{f(t_0+0) + f(t_0-0)}{2}$$

特に，$f(t)$ が t_0 で連続ならば部分和 $s_N(f,t_0)$ は $f(t_0)$ に収束する．

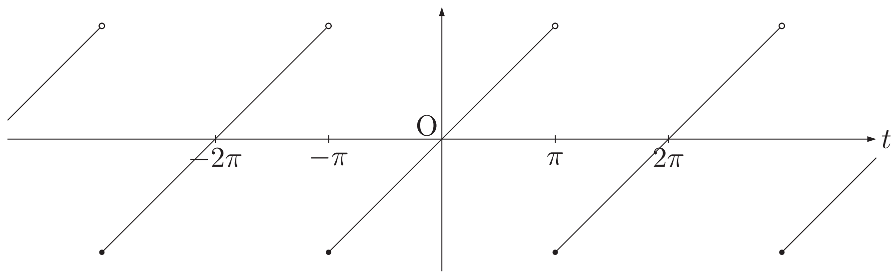
例 5 関数 t ($-\pi \leqq t < \pi$) を図のように周期 2π の関数に拡張した関数 $f(t)$ の Fourier 級数に対して

$$a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$$

である．$f(t)$ は $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかであり，$(-\pi, \pi)$ で連続であるから，

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt \quad (-\pi < t < \pi)$$

が成り立つ．



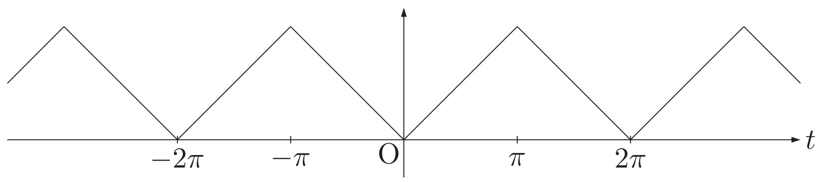
例 6 関数 $|t|$ ($-\pi \leqq t \leqq \pi$) を図のように周期 2π の関数に拡張した関数 $f(t)$ に対して

$$a_0 = \pi\,, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \ (n \geqq 1)\,, \qquad b_n = 0$$

がである．$f(t)$ は $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかであり，$\mathbb{R}$ で連続であるから，

$$|t| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nt = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

が成り立つ．



6　Parseval の等式

Fourier 級数に対しては多くの重要な定理が得られているが，本稿では次の定理を述べるにとどめておく．

定理 7 (Parseval の等式)
$f(t)$ が周期 2π の関数で，$|f(t)|^2$ が $[-\pi, \pi]$ において積分可能ならば次式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(|a_n|^2 + |b_n|^2\bigr) \tag{16}$$

この定理は関数の L^2 ノルムと呼ばれる量

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

が $f(t)$ のすべての周期（周波数）の成分を用いて表せることを示している．より一般には次の定理が成り立つことが知られている．

定理 8　周期 2π の関数 $f(t)$, $g(t)$ の複素 Fourier 係数を $c_n(f)$, $c_n(g)$ とする．$|f(t)|^2$, $|g(t)|^2$ が $[-\pi, \pi]$ において積分可能ならば次式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} \tag{17}$$

が成り立つ．$f(t)$, $g(t)$ の Fourier 係数をそれぞれ $\{a_n(f), b_n(f)\}$, $\{a_n(g), b_n(g)\}$ とすると

$$\frac{1}{\pi}(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \, dt = \frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}\right) \tag{18}$$

7　Fourier 変換の定義

これまでに述べたように，周期関数からは Fourier 級数により元の関数がもつ周波数の整数倍の周波数の成分を取り出すことができた．周期をもたない関数についても同じことができないか考えたい．例 2 で述べたように，周期をもたない関数にも周期（周波数）の成分が含まれていると考えられる．周期をもたない関数を周期が無限大の関数として考えてみる．周期 $2T$ の関数は $\{e^{in\frac{\pi}{T}t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ によって展開することができた．$\mathbb{R}$ 全体で定義された周期をもたない関数 $f(t)$ を区間 $[-T, T]$ で Fourier 展開し，$T \to \infty$ とすると，形式的に

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{T}t}, \qquad c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\tau) e^{in\frac{\pi}{T}\tau} \, d\tau$$

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(\tau) e^{-in\frac{\pi}{T}\tau} \, d\tau \right) e^{in\frac{\pi}{T}t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} \, d\tau \right) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \qquad \omega_n = \frac{\pi n}{T}, \ \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \right) e^{i\omega t} \, d\omega \end{aligned}$$

が得られる．式

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ix\omega} \, dt$$

を $f(t)$ の **Fourier 変換**という．$\hat{f}$ は $\mathcal{F}[f]$ や F（小文字 f に対する大文字）とも表す．$\mathbb{R}$ で定義された関数 $F(\omega)$ に対して，式

$$\check{F}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{it\omega} \, d\omega$$

を $F(\omega)$ の **Fourier 逆変換**という．$\check{F}$ は $\mathcal{F}^{-1}[F]$ とも表す．

注意 Fourier 変換と Fourier 逆変換を次のように定義する流儀もある．

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\omega}\,dt\,,\qquad \check{F}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{it\omega}\,d\omega$$

例 9 確率・統計において重要な関数 $f(t)=e^{-at^2}=\exp(-at^2)$ ($a>0$) の Fourier 変換は

$$\hat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\Big(-\frac{\omega^2}{4a}\Big)$$

となる．特に，$a=1/2$ のとき次式のように Fourier 変換は元の関数の定数倍となる．

$$\mathcal{F}\Big[\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big](\omega)=\sqrt{2\pi}\exp\Big(-\frac{\omega^2}{2}\Big)$$

8 反転公式

さて，Fourier 変換と元の関数にはどのような関係があるのだろうか．それを説明するのは次の定理である．

定理 10 (反転公式)
関数 $f(t)$ が任意の有限閉区間で区分的に滑らかであり，$|f(t)|$ が $\mathbb{R}$ で絶対可積分ならば，次が成り立つ．

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}\,d\omega=f^*(t_0)=\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}$$

さらに，$|\hat{f}(\omega)|$ が $\mathbb{R}$ で積分可能ならば

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}\,d\omega=\lim_{\substack{A\to\infty\\ B\to-\infty}}\frac{1}{2\pi}\int_{B}^{A}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}\,d\omega=f^*(t_0)$$

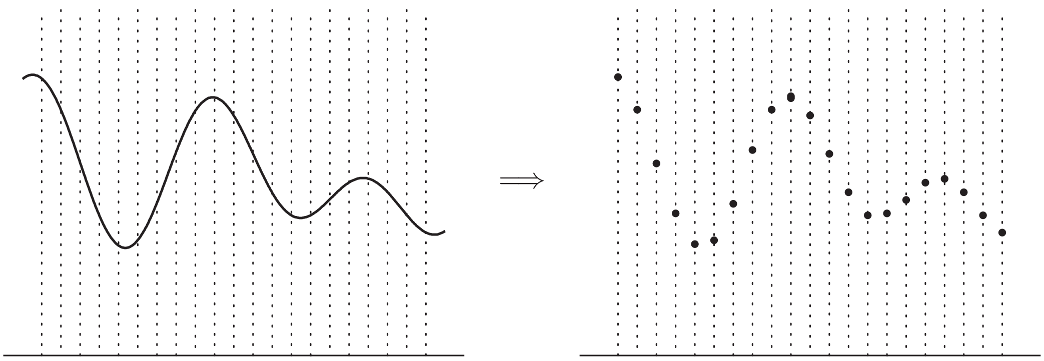
この定理より，連続関数 $f(t)$ に対しては

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

が成り立つことがわかる．積分の中に現れる関数 $e^{i\omega t}=\cos\omega t+\sin\omega t$ は周波数 $|\omega|/2\pi$ の単振動を表しているから，Fourier 変換 $\hat{f}(\pm\omega)$ は $f(t)$ に含まれる周波数 $|\omega|/2\pi$ の単振動の成分を表してることがわかる．

9　サンプリング定理

デジタル方式による情報の記録は「すべての情報を数字に置き換えて記録する」という考え方によっている．用いられる数字は 0 と 1 からなる 2 進数である．今まで扱ってきた関数 $f(t)$ に対して，図のように，離散的な関数値 $\{\, f(nT) \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ を選ぶことによりデジタル方式に変換する操作を**サンプリング**（**sampling**）または**標本化**と呼ぶ．1 つの例として，音楽 CD はデジタル・データであるから，歌や演奏をレコーディングして CD を作成する際にはサンプリングの操作が行われている．



サンプリングに関して一番の問題となるのは「サンプリングされたデータ $\{f(nT)\}$ から元の関数 $f(t)$ を再現できるか？」である．この問題に対する解答が次の定理である．

定理 11 (サンプリング定理)
関数 $f(t)$ は連続，任意の有限区間で区分的に滑らか，$\mathbb{R}$ で絶対可積分とする．ある定数 $T > 0$ に対して

$$\hat{f}(\omega) = 0 \qquad (\ |\omega| > \frac{\pi}{T}\ )$$

を満たすならば，次が成り立つ．

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin \dfrac{\pi}{T}(t - nT)}{\dfrac{\pi}{T}(t - nT)}$$

この定理は 1928 年に Nyquist によって予想され，1949 年に情報理論の父と呼ばれる C. Shannon と日本の染谷勲によって独立に証明された．そのため，ナイキスト・シャノンの定理，シャノン・染谷の定理などとも呼ばれる．さらに，小倉金之助による先駆的な研究が行われていたことが [5] で述べられている．

サンプリング定理は，$f(t)$ が $1/2T = (1/2\pi)(\pi/T)$ より大きな周波数の成分を含まなければ，その 2 倍の周波数 $1/T$ に対応する間隔 T でサンプリングしたデータ $\{f(nT)\}$ から $f(t)$ が再現できることを示している．サンプリングの間隔 T に対する周波数 $1/T$ は**サンプリング周波数**と呼ばれる．サンプリング周波数の半分の $1/2T$ は **Nyquist 周波数**と呼ばれる．

現代の情報化社会において，ありとあらゆるデジタル方式はすべてこのサンプリング定理に基づいている．音波の場合，人間の耳は 20kHz より大きい周波数の音を聞くことができな

いことがわかっているので，その倍の 40kHz 以上のサンプリング周波数を用いてサンプリングを行えば元の音を再生できることがわかる．音楽 CD の規格（CD–DA）のサンプリング周波数は 44.1kHz であり，DVD やデジタル衛星放送の音声では 48kHz のサンプリング周波数が使用されている．最近のオーディオの世界で用いられているハイレゾ音源とは 48kHz, 96kHz, 192kHz といった CD 規格より高いサンプリング周波数でサンプリングしたデータのことを指すもので，レコーディングの際にサンプリングの操作を行っていること自体は CD と変わりはない．

サンプリング定理の証明　最後に，[6] による定理の初等的な証明を述べておく．反転公式より，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

が成り立つ．$\dfrac{1}{T}\hat{f}(\omega)$ を周期 $\dfrac{2\pi}{T}$ の関数に拡張した関数

$$g(\omega) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega) \quad \left(\ |\omega| \leqq \frac{2\pi}{T}\ \right)$$

の複素 Fourier 級数展開を求めると，

$$g(\omega) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g)e^{inT\omega}$$

$$c_n(g) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} g(\omega)e^{-inT\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{f}(\omega)e^{-inT\omega}\,d\omega = f(-nT)$$

となる．関数 $e^{-i\omega t}$ を周期 $\dfrac{2\pi}{T}$ の関数に拡張した関数

$$h(\omega) = e^{-i\omega t} \quad \left(\ |\omega| \leqq \frac{2\pi}{T}\ \right)$$

の Fourier 級数展開を求めると，

$$h(\omega) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(h)e^{inT\omega}$$

$$c_n(h) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{-i\omega t}e^{-inT\omega}\,d\omega = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\omega(t+nT)}}{-i(t+nT)}\right]_{\omega=-\pi/T}^{\omega=\pi/T} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t+nT)}{\dfrac{\pi}{T}(t+nT)}$$

となる．Parseval の等式を用いて，次式を得る．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{1}{T}\hat{f}(\omega)\overline{e^{-i\omega t}}\,d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} g(\omega)\overline{h(\omega)}\,d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g)\overline{c_n(h)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-nT)\overline{\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t+nT)}{\dfrac{\pi}{T}(t+nT)}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t-nT)}{\dfrac{\pi}{T}(t-nT)} \end{aligned}$$

10　まとめ

本稿で解説した内容を，高校生に話す際には，微分積分に関する用語はなるべく使わないように努めた．しかし，Fourier 級数と Fourier 変換について説明する際に用いた式には,「これは高校の数学 III で学ぶ内容」,「これは大学の理系学部の 2 年次に学ぶ内容」等の補足説明を施した．Fourier 級数の具体例については数学 III の知識で計算できるに限った．サンプリング定理の重要性については理解してもらえたとは思うが，Fourier 級数の極限やサンプリング定理のその仕組みを数式処理ソフト等で可視化した教材を用いることにより講演全体の理解度を増すことができると思われる．高校生に現代社会における数学の重要性を認識させるためには，多くの題材を用いたさらなる試行の積み重ねが必要であると考えている．

参考文献

[1] 壁谷喜継 『フーリエ解析と偏微分方程式入門』 共立出版，2010

[2] 小暮陽三 『なっとくするフーリエ変換』 講談社，1999

[3] 高橋陽一郎 『実関数とフーリエ解析』 岩波書店，2006

[4] 松下泰雄 『フーリエ解析』 培風館，2001

[5] P. L. Butzer, P.J.S.G. Ferreira, J. R. Higgins, S. Saitoh, G. Schmeisser and R. L. Stens, “Interpolation and sampling: E.T. Whittaker, K. Ogura and their followers”, J. Fourier Anal. Appl. **17**, 320-354 (2011)

[6] A. Vretblad 『Fourier Analysis and Its Applications』 Springer, 2003